ANALISIS DIMENSI DAN MODEL MATEMATIKA

Oleh :
Prof. Dr. Ir. Santosa, MP
Guru Besar pada Program Studi Teknik Pertanian,
Fakultas Teknologi Pertanian Universitas Andalas
Padang, April 2010

I. PENURUNAN SEBUAH BENTUK TAK BERDIMENSI

Contoh soal (1) :

Tekanan yang terjadi pada fluida dipengaruhi oleh kecepatan aliran dan densitas fluida serta percepatan gravitasi. Susunlah bentuk tak berdimensi dari variabel-variabel tersebut!

Jawab :

Variabel gayut : Tekanan = P [=] $ML^{-1}T^{-2}$

Variabel bebas : Kecepatan = v [=] LT^{-1}

Densitas = ρ [=] ML^{-3}

Percepatan gravitasi = g [=] LT^{-2}

Banyaknya variabel = 4

Banyaknya dimensi dasar = 3

Banyaknya π = 4-3 = 1

$P = f(v, \rho, g)$

Persaman umum :

$K \cdot P^{c1} \cdot V^{c2} \cdot \rho^{c3} \cdot g^{c4} = 1$

Dimensinya :

$(ML^{-1}T^{-2})^{c1} \cdot (LT^{-1})^{c2} \cdot (ML^{-3})^{c3} \cdot (LT^{-2})^{c4} = (MLT)^{o}$

Kesamaan eksponen :

M : $c1 + c3 = 0$

L : $- c1 + c2 - 3\,c3 + c4 = 0$

T : $-2\,c1 - c2 - 2\,c4 = 0$

Mencari c1,c2, c3 dan c4 dengan 3 persamaan, maka perlu 1 konstanta yang dibuat nilainya tertentu.

Dipilih : c1 = 1, sehingga diperoleh :

M : ➔ c3 = -1

L : -1 + c2 – 3 (-1) + c4 = 0

-1 + c2 + 3 + c4 = 0

➔ c2 + c4 = - 2

T : -2 (1) – c2 – 2 c4 = 0

➔ c2 + 2 c4 = -2

Sehingga diperoleh : c4 = 0 dan c2 = -2

Jadi :

c1 = 1 ; c2 = -2 ; c3 = -1 dan c4 = 0.

Persamaan umum :

$K. P^{1} . V^{-2} . \rho^{-1} = 1$

$\Leftrightarrow \quad \pi = P / [\rho V^{2}]$

π ini adalah bilangan Euler.

Contoh soal (2) :

Gaya dorong *propeller* kapal laut diduga dipengaruhi oleh densitas air, kecepatan kapal dan diameter *propeller*. Susunlah bentuk tak berdimensi dari variabel-variabel tersebut !

Jawab :

Variabel gayut = F [=] M L T $^{-2}$

Variabel bebas = ρ [=] ML^{-3}

V [=] LT^{-1}

.d [=] L

Banyaknya variabel = 4 (F, ρ, V, d)

Banyaknya dimensi dasar = 3 (M,L,T)

Banyaknya π = 4-3 = 1

F = f (ρ, V, d)

Persaman umum :

$K . F^{c1} . \rho^{c2} .V^{c3} d^{c4} = 1$

Dimensinya :

$(MLT^{-2})^{c1} . (ML^{-3})^{c2} . (LT^{-1})^{c3} . (L)^{c4} = (MLT)^{o}$

Kesamaan eksponen :

M : c1 + c2 = 0

L : c1 –3c2 + c3 + c4 = 0

T : -2 c1 – c3 = 0

Mencari c1,c2, c3 dan c4 dengan 3 persamaan, maka perlu 1 konstanta yang dibuat nilainya tertentu.

Dipilih c1 = 1

Maka :

M ---- > c1 + c2 = 0

1 + c2 = 0 ➔ c2 = -1

L ---- > c1 – 3 c2 + c3 + c4 = 0

1 – 3 (-1) + c3 + c4 = 0

c3 + c4 = -4

T ---- > -2 c1 – c3 = 0

- 2 (1) – c3 = 0

➔ c3 = -2

Dengan demikian, maka diperoleh c3 + c4 = -4 ➔ c4 = -2

Jadi : c1 = 1 ; c2 = -1 ; c3 = -2 dan c4 = -2

Sehingga diperoleh persamaan umum :

$K . F^{c1} . \rho^{c2} . V^{c3} . d^{c4} = 1$

$K. F^{1} . \rho^{-1} .V^{-2} .d^{-2} = 1$

$\Leftrightarrow \pi = F / [\rho V^{2} .d^{2}]$

II. PERSAMAAN MATEMATIS DENGAN DUA PHI

Contoh :

Dari data di bawah ini :

π_1(S/V.t)	π_2(g.t / V)
1,0	0
1,5	1
2,0	2
2,5	3
3,0	4

Tuliskan persamaan matematik yang dihasilkan dalam bentuk S = f (V, t, g) !

Jawab :

Plot data pada grafik, dengan sumbu absis π_2(g.t / V) dan ordinat π_1(S/V.t) , maka diperoleh persamaan

$\pi_1 = 1 + 0{,}5\, \pi_2$

➔ (S/V.t) = 1 + 0,5 (g.t / V)

Sehingga :

S = V t + 0,5 . (g.t / V) V t

➔ $S = V\,t + 0{,}5\ g\,t^2$

III. REGRESI SEBAGAI PENDUKUNG PENJABARAN SECARA MATEMATIS SUATU DESAIN

3.1 Regresi Linear

Pada Santosa (2005) dijelaskan sebagai berikut :

Model persamaan matematis regresi linear yang dirancang adalah :

$$Y = a_0 + a_1 X \quad \ldots\ldots (3.1)$$

Penyelesaian nilai a_0 dan a_1 dalam dua persamaan simultan (3.2) dan (3.3) dengan dua nilai yang tidak diketahui, yaitu a_0 dan a_1.

$$n \cdot a_0 + \Sigma X_i \cdot a_1 = \Sigma Y_i \quad \ldots\ldots (3.2)$$

$$\Sigma X_i \cdot a_0 + \Sigma X_i^2 \cdot a_1 = \Sigma X_i Y_i \quad \ldots\ldots (3.3)$$

dengan n adalah banyaknya pasangan data (X,Y).

Untuk mendapatkan hasil regresi yang paling bagus dari data yang tersedia ialah dengan meminimalkan jumlah kuadrat residual. Untuk keabsahan (validasi) model, dilakukan perhitungan koefisien determinasi r^2, dengan formula :

$$r^2 = (S_t - S_r) / S_t \quad \ldots\ldots (3.4)$$

S_t merupakan jumlah penyebaran pada peubah tak bebas yang terjadi sebelum dilakukan regresi, sedangkan S_r merupakan jumlah kuadrat residual di sekitar garis regresi tersebut. Pada model regresi linear :

$$S_t = \Sigma (Y_i - YM)^2 \quad \ldots\ldots (3.5)$$

dengan YM adalah nilai rata-rata Y.

$$S_r = \Sigma (Y_i - ao - a1 X_i)^2 \quad \ldots\ldots (3.6)$$

3.2 Regresi Parabolik

Pada Santosa (2005) dijelaskan sebagai berikut :

Model matematika untuk regresi parabolik adalah :

$$Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \quad \ldots\ldots (3.7)$$

Penyelesaian regresi parabolik ini adalah berupa sekumpulan tiga persamaan simultan dengan tiga nilai yang tidak diketahui, yaitu a_0, a_1 dan a_2, disajikan pada persamaan(3.8), (3.9), dan (3.10).

$$n \,.\, a_0 + \Sigma X_i \,.\, a_1 + \Sigma X_i^{\,2} \,.\, a_2 = \Sigma Y_i \text{ ....(3.8)}$$

$$\Sigma X_i \,.a_0 + \Sigma X_i^2 \,.\, a_1 + \Sigma X_i^{\,3} \,.\, a_2 = \Sigma X_i Y_i \text{ ....(3.9)}$$

$$\Sigma X_i^{\,2} \,.a_0 + \Sigma X_i^3 \,.\, a_1 + \Sigma X_i^{\,4} \,.\, a_2 = \Sigma X_i^{\,2} Y_i \text{ ....(3.10)}$$

dengan n adalah banyaknya pasangan data (X,Y).

3.3 Fungsi Perpangkatan

Pada Santosa (2005) dijelaskan sebagai berikut :

Pada fungsi perpangkatan, hubungan antara peubah bebas X dan peubah tak bebas Y adalah :

$$Y = \alpha X^{\beta} \text{ ....(3.11)}$$

dengan α dan β adalah parameter penduga, yang nilainya didasarkan pada data hasil pengukuran. Pada model fungsi perpangkatan ini diasumsikan bahwa nilai X selalu positif. Untuk mengestimasi nilai α dan β dilakukan transformasi logaritma persamaan (3.11) sehingga menjadi persamaan (3.12).

$$.\log Y = \log \alpha + \beta \log X \text{ ....(3.12)}$$

dengan memisalkan bahwa log Y = Y’ , log α = α’ , dan log X = X’, maka diperoleh suatu bentuk persamaan garis linear :

$$Y' = \alpha' + \beta X' \text{ ....(3.13)}$$

Dengan demikian maka nilai prediksi α didapat melalui antilog α’, sedangkan nilai β pada persamaan (9.12) tetap merupakan nilai pada fungsi perpangkatannya.

3.4 Regresi Kubik

Pada Santosa (2005) dijelaskan sebagai berikut :

Bentuk persamaan matematika yang menggambarkan regresi kubik adalah :

$$Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \text{ ....(3.14)}$$

Dengan a_0, a_1, a_2 dan a_3 koefisien yang diperoleh dari hasil regresi.

Penyelesaian regresi kubik ini adalah berupa sekumpulan empat persamaan simultan dengan empat nilai yang tidak diketahui, yaitu a_0, a_1 , a_2 dan a_3, disajikan pada persamaan (3.15), (3.16), (3.17) dan (3.18).

$$n \cdot a_0 + \Sigma X_i \cdot a_1 + \Sigma X_i^2 \cdot a_2 + \Sigma X_i^3 \cdot a_3 = \Sigma Y_i \text{ ....(3.15)}$$

$$\Sigma X_i \cdot a_0 + \Sigma X_i^2 \cdot a_1 + \Sigma X_i^3 \cdot a_2 + \Sigma X_i^4 \cdot a_3 = \Sigma X_i Y_i \text{ ....(3.16)}$$

$$\Sigma X_i^2 \cdot a_0 + \Sigma X_i^3 \cdot a_1 + \Sigma X_i^4 \cdot a_2 + \Sigma X_i^5 \cdot a_3 = \Sigma X_i^2 Y_i \text{ ....(3.17)}$$

$$\Sigma X_i^3 \cdot a_0 + \Sigma X_i^4 \cdot a_1 + \Sigma X_i^5 \cdot a_2 + \Sigma X_i^6 \cdot a_3 = \Sigma X_i^3 Y_i \text{ ....(3.18)}$$

dengan n adalah banyaknya pasangan data (X,Y).

3.5 Regresi Linear Berganda dengan Dua Peubah Bebas

Pada Santosa (2005) dijelaskan sebagai berikut :

Bentuk persamaan matematika yang menggambarkan regresi linear berganda dengan dua peubah bebas adalah :

$$Y = a_0 + a_1 X1 + a_2 X2 \text{ ....(3.19)}$$

Dengan a_0, a_1, dan a_2 adalah koefisien yang diperoleh dari hasil regresi. Penyelesaian dari persamaan tersebut berupa sekumpulan tiga persamaan simultan dengan tiga nilai yang tidak diketahui yaitu a_0, a_1 dan a_2, disajikan dalam persamaan (3.20), (3.21), dan (3.22).

$$n \cdot a_0 + \Sigma X1_i \cdot a_1 + \Sigma X2_i \cdot a_2 = \Sigma Y_i \text{ ....(3.20)}$$

$$\Sigma X1_i \cdot a_0 + \Sigma X1^2_i \cdot a_1 + \Sigma X2_i X1_i \cdot a_2 = \Sigma X1_i Y_i \text{ ....(3.21)}$$

$$\Sigma X2_i \cdot a_0 + \Sigma X2_i X1_i \cdot a_1 + \Sigma X2^2_i \cdot a_2 = \Sigma X2_i Y_i \text{ ....(3.22)}$$

dengan n adalah banyaknya pasangan data (X1, X2, Y).

3.6 Regresi Linear Berganda dengan Tiga Peubah Bebas

Pada Santosa (2005) dijelaskan sebagai berikut :

Bentuk persamaan matematika yang menggambarkan regresi linear berganda dengan tiga peubah bebas adalah :

$$Y = a_0 + a_1\,X1 + a_2\,X2 + a3\,X3 \;\ldots\ldots\ldots(3.23)$$

Dengan a_0, a_1, a_2 dan a_3 adalah koefisien yang diperoleh dari hasil regresi. Penyelesaian dari persamaan tersebut berupa sekumpulan empat persamaan simultan dengan empat nilai yang tidak diketahui yaitu a_0, a_1 , a_2, dan a_3 adisajikan dalam persamaan (3.24), (3.25), (3.26) dan (3.27).

$$n\,.\,a_0 + \Sigma\,X1_i\,.\,a_1 + \Sigma\,X2_i\,.\,a_2 + \Sigma\,X3_i\,.\,a_3 = \Sigma\,Y_i \;\ldots\ldots\ldots(3.24)$$

$$\Sigma\,X1_i\,.a_0 + \Sigma\,X1^2{}_i\,.a_1 + \Sigma\,X2_i\,X1_i\,.\,a_2 + \Sigma\,X3_i\,X1_i\,.\,a_3 = \Sigma\,X1_i\,Y_i \;\ldots(3.25)$$

$$\Sigma\,X2_i\,.a_0 + \Sigma\,X2_i\,X1_i\,.a_1 + \Sigma\,X2^2{}_i\,.\,a_2 + \Sigma\,X3_i\,X2_i\,.\,a_3 = \Sigma\,X2_i\,Y_i \;\ldots\ldots(3.26)$$

$$\Sigma\,X3_i\,.a_0 + \Sigma\,X3_i\,X1_i\,.a_1 + \Sigma\,X3_i\,X2_i\,.\,a_2 + \Sigma\,X3^2{}_i\,.\,a_3 = \Sigma\,X3_i\,Y_i \;\ldots\ldots(3.27)$$

dengan n adalah banyaknya pasangan data (X1, X2, X3, Y).

3.7 Persamaan Eksponensial

Pada Santosa (2005) dijelaskan sebagai berikut :

Persamaan matematis yang menggambarkan model eksponensial adalah :

$$Y = \alpha\, e^{\beta\,X} \;\ldots\ldots\ldots(3.28)$$

Dengan α dan β adalah parameter yang akan diduga nilainya, sedangkan e adalah bilangan logarithma natural, yaitu 2,7183.

Estimasi nilai α dan β dari bentuk fungsi eksponensial tersebut dapat dilakukan dengan mentransformasikan model tersebut ke bentuk linearnya melalui logarithma sebagai berikut :

dari $Y = \alpha\, e^{\beta\,X}$

maka :

$$\ln Y = \ln \alpha + \beta \ln e$$

$$\Leftrightarrow \ln Y = \ln \alpha + \beta \quad X \quad ....(3.29)$$

Di bawah ini disajikan program persamaan eksponensial dalam bentuk :

$$Y = P e^{Q X} \quad ....(3.30)$$

dari sekelompok data pasangan (X,Y). Setelah dilakukan transformasi logaritma diperoleh :

$$\ln Y = \ln P + Q \quad X \quad ....(3.31)$$

Dengan memisalkan :

F = ln Y; A = ln P, dan B = Q, maka dapat dibuat persamaan garis regresi linear :

$$F = A + B . X \quad ....(3.32)$$

Dengan demikian diperoleh nilai A dan B. Berarti :

P = anti ln $A = e^{A}$

$Q = B$

3.8 Fungsi Transformasi Semi-Log

Pada Santosa (2005) dijelaskan sebagai berikut :

Bentuk fungsi transformasi semi-log adalah :

$$Y = a + b \ln X \quad ....(3.33)$$

dengan memisalkan V = ln X, maka diperoleh persamaan regresi linear :

$$Y = A + B . V \quad ....(3.34)$$

maka dapat diperoleh nilai konstanta A dan B.

DAFTAR PUSTAKA

Murphy, Glenn. 1950. ***Similitude in Engineering.*** The Ronald Press Company. USA.

Santosa. 1993. ***Aplikasi Program BASIC untuk Analisis Data Penelitian Dalam Penyajian Model Matematika***. Cetakan Pertama. Penerbit Andi Offset. Yogyakarta.

Santosa. 2005. ***Aplikasi Visual Basic 6.0 dan Visual Studio.Net 2003 Dalam Bidang Teknik dan Pertanian***. Penerbit Andi. Yogyakarta.