

## ANALISIS DIMENSI DAN MODEL MATEMATIKA

Oleh :

Prof. Dr. Ir. Santosa, MP

Guru Besar pada Program Studi Teknik Pertanian,

Fakultas Teknologi Pertanian Universitas Andalas

Padang, April 2010

### I. PENURUNAN SEBUAH BENTUK TAK BERDIMENSI

#### Contoh soal (1) :

Tekanan yang terjadi pada fluida dipengaruhi oleh kecepatan aliran dan densitas fluida serta percepatan gravitasi. Susunlah bentuk tak berdimensi dari variabel-variabel tersebut!

Jawab :

Variabel gayut : Tekanan =  $P [=] ML^{-1}T^{-2}$

Variabel bebas : Kecepatan =  $v [=] LT^{-1}$

Densitas =  $\rho [=] ML^{-3}$

Percepatan gravitasi =  $g [=] LT^{-2}$

Banyaknya variabel = 4

Banyaknya dimensi dasar = 3

Banyaknya  $\pi = 4 - 3 = 1$

$P = f(v, \rho, g)$

Persamaan umum :

$$K \cdot P^{c_1} \cdot v^{c_2} \cdot \rho^{c_3} \cdot g^{c_4} = 1$$

Dimensinya :

$$(ML^{-1}T^{-2})^{c_1} \cdot (LT^{-1})^{c_2} \cdot (ML^{-3})^{c_3} \cdot (LT^{-2})^{c_4} = (MLT)^0$$

Kesamaan eksponen :

$$M : c_1 + c_3 = 0$$

$$L : -c_1 + c_2 - 3c_3 + c_4 = 0$$

$$T : -2c_1 - c_2 - 2c_4 = 0$$

Mencari  $c_1, c_2, c_3$  dan  $c_4$  dengan 3 persamaan, maka perlu 1 konstanta yang dibuat nilainya tertentu.

Dipilih :  $c_1 = 1$ , sehingga diperoleh :

$$M : \rightarrow c_3 = -1$$

$$L : -1 + c_2 - 3(-1) + c_4 = 0$$

$$-1 + c_2 + 3 + c_4 = 0$$

$$\rightarrow c_2 + c_4 = -2$$

$$T : -2(1) - c_2 - 2c_4 = 0$$

$$\rightarrow c_2 + 2c_4 = -2$$

Sehingga diperoleh :  $c_4 = 0$  dan  $c_2 = -2$

Jadi :

$$c_1 = 1 ; c_2 = -2 ; c_3 = -1 \text{ dan } c_4 = 0.$$

Persamaan umum :

$$K \cdot P^1 \cdot V^{-2} \cdot \rho^{-1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \pi = P / [\rho V^2]$$

$\pi$  ini adalah bilangan Euler.

### **Contoh soal (2) :**

Gaya dorong *propeller* kapal laut diduga dipengaruhi oleh densitas air, kecepatan kapal dan diameter *propeller*. Susunlah bentuk tak berdimensi dari variabel-variabel tersebut !

Jawab :

$$\text{Variabel gayut} = F [=] M L T^{-2}$$

$$\text{Variabel bebas} = \rho [=] M L^{-3}$$

$$V [=] L T^{-1}$$

$$.d [=] L$$

Banyaknya variabel = 4 (F,  $\rho$ , V, d)

Banyaknya dimensi dasar = 3 (M, L, T)

$$\text{Banyaknya } \pi = 4 - 3 = 1$$

$$F = f(\rho, V, d)$$

Persamaan umum :

$$K \cdot F^{c_1} \cdot \rho^{c_2} \cdot V^{c_3} \cdot d^{c_4} = 1$$

Dimensinya :

$$(\text{MLT}^{-2})^{c_1} \cdot (\text{ML}^{-3})^{c_2} \cdot (\text{LT}^{-1})^{c_3} \cdot (\text{L})^{c_4} = (\text{MLT})^0$$

Kesamaan eksponen :

$$\text{M} : c_1 + c_2 = 0$$

$$\text{L} : c_1 - 3c_2 + c_3 + c_4 = 0$$

$$\text{T} : -2c_1 - c_3 = 0$$

Mencari  $c_1, c_2, c_3$  dan  $c_4$  dengan 3 persamaan, maka perlu 1 konstanta yang dibuat nilainya tertentu.

Dipilih  $c_1 = 1$

Maka :

$$\text{M} \text{ ----} > c_1 + c_2 = 0$$

$$1 + c_2 = 0 \rightarrow c_2 = -1$$

$$\text{L} \text{ ----} > c_1 - 3c_2 + c_3 + c_4 = 0$$

$$1 - 3(-1) + c_3 + c_4 = 0$$

$$c_3 + c_4 = -4$$

$$\text{T} \text{ ----} > -2c_1 - c_3 = 0$$

$$- \quad \quad \quad 2(1) - c_3 = 0$$

$$\rightarrow c_3 = -2$$

Dengan demikian, maka diperoleh  $c_3 + c_4 = -4 \rightarrow c_4 = -2$

Jadi :  $c_1 = 1$  ;  $c_2 = -1$  ;  $c_3 = -2$  dan  $c_4 = -2$

Sehingga diperoleh persamaan umum :

$$K \cdot F^{c_1} \cdot \rho^{c_2} \cdot V^{c_3} \cdot d^{c_4} = 1$$

$$K \cdot F^1 \cdot \rho^{-1} \cdot V^{-2} \cdot d^{-2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \pi = F / [\rho V^2 \cdot d^2]$$

## II. PERSAMAAN MATEMATIS DENGAN DUA PHI

### Contoh :

Dari data di bawah ini :

$\pi_1(S/V.t)$	$\pi_2(g.t / V)$
1,0	0
1,5	1
2,0	2
2,5	3
3,0	4

Tuliskan persamaan matematik yang dihasilkan dalam bentuk  $S = f(V, t, g)$  !

Jawab :

Plot data pada grafik, dengan sumbu absis  $\pi_2(g.t / V)$  dan ordinat  $\pi_1(S/V.t)$  , maka diperoleh persamaan

$$\pi_1 = 1 + 0,5 \pi_2$$

$$\rightarrow (S/V.t) = 1 + 0,5 (g.t / V)$$

Sehingga :

$$S = V t + 0,5 \cdot (g.t / V) V t$$

$$\rightarrow S = V t + 0,5 g t^2$$

### III. REGRESI SEBAGAI PENDUKUNG PENJABARAN SECARA MATEMATIS SUATU DESAIN

#### 3.1 Regresi Linear

Pada Santosa (2005) dijelaskan sebagai berikut :

Model persamaan matematis regresi linear yang dirancang adalah :

$$Y = a_0 + a_1 X \dots\dots\dots(3.1)$$

Penyelesaian nilai  $a_0$  dan  $a_1$  dalam dua persamaan simultan (3.2) dan (3.3) dengan dua nilai yang tidak diketahui, yaitu  $a_0$  dan  $a_1$ .

$$n \cdot a_0 + \sum X_i \cdot a_1 = \sum Y_i \dots\dots\dots(3.2)$$

$$\sum X_i \cdot a_0 + \sum X_i^2 \cdot a_1 = \sum X_i Y_i \dots\dots\dots(3.3)$$

dengan  $n$  adalah banyaknya pasangan data  $(X, Y)$ .

Untuk mendapatkan hasil regresi yang paling bagus dari data yang tersedia ialah dengan meminimalkan jumlah kuadrat residual. Untuk keabsahan (validasi) model, dilakukan perhitungan koefisien determinasi  $r^2$ , dengan formula :

$$r^2 = (S_t - S_r) / S_t \dots\dots\dots(3.4)$$

$S_t$  merupakan jumlah penyebaran pada peubah tak bebas yang terjadi sebelum dilakukan regresi, sedangkan  $S_r$  merupakan jumlah kuadrat residual di sekitar garis regresi tersebut. Pada model regresi linear :

$$S_t = \sum (Y_i - YM)^2 \dots\dots\dots(3.5)$$

dengan  $YM$  adalah nilai rata-rata  $Y$ .

$$S_r = \sum (Y_i - a_0 - a_1 X_i)^2 \dots\dots\dots(3.6)$$

#### 3.2 Regresi Parabolik

Pada Santosa (2005) dijelaskan sebagai berikut :

Model matematika untuk regresi parabolik adalah :

$$Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \dots\dots\dots(3.7)$$

Penyelesaian regresi parabolik ini adalah berupa sekumpulan tiga persamaan simultan dengan tiga nilai yang tidak diketahui, yaitu  $a_0$ ,  $a_1$  dan  $a_2$ , disajikan pada persamaan(3.8), (3.9), dan (3.10).

$$n \cdot a_0 + \sum X_i \cdot a_1 + \sum X_i^2 \cdot a_2 = \sum Y_i \dots\dots\dots(3.8)$$

$$\sum X_i \cdot a_0 + \sum X_i^2 \cdot a_1 + \sum X_i^3 \cdot a_2 = \sum X_i Y_i \dots\dots\dots(3.9)$$

$$\sum X_i^2 \cdot a_0 + \sum X_i^3 \cdot a_1 + \sum X_i^4 \cdot a_2 = \sum X_i^2 Y_i \dots\dots\dots(3.10)$$

dengan n adalah banyaknya pasangan data (X,Y).

### 3.3 Fungsi Perpangkatan

Pada Santosa (2005) dijelaskan sebagai berikut :

Pada fungsi perpangkatan, hubungan antara peubah bebas X dan peubah tak bebas Y adalah :

$$Y = \alpha X^\beta \dots\dots\dots(3.11)$$

dengan  $\alpha$  dan  $\beta$  adalah parameter penduga, yang nilainya didasarkan pada data hasil pengukuran. Pada model fungsi perpangkatan ini diasumsikan bahwa nilai X selalu positif. Untuk mengestimasi nilai  $\alpha$  dan  $\beta$  dilakukan transformasi logaritma persamaan (3.11) sehingga menjadi persamaan (3.12).

$$\log Y = \log \alpha + \beta \log X \dots\dots\dots(3.12)$$

dengan memisalkan bahwa  $\log Y = Y'$ ,  $\log \alpha = \alpha'$ , dan  $\log X = X'$ , maka diperoleh suatu bentuk persamaan garis linear :

$$Y' = \alpha' + \beta X' \dots\dots\dots(3.13)$$

Dengan demikian maka nilai prediksi  $\alpha$  didapat melalui antilog  $\alpha'$ , sedangkan nilai  $\beta$  pada persamaan (9.12) tetap merupakan nilai pada fungsi perpangkatannya.

### 3.4 Regresi Kubik

Pada Santosa (2005) dijelaskan sebagai berikut :

Bentuk persamaan matematika yang menggambarkan regresi kubik adalah :

$$Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \dots\dots\dots(3.14)$$

Dengan  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  dan  $a_3$  koefisien yang diperoleh dari hasil regresi.

Penyelesaian regresi kubik ini adalah berupa sekumpulan empat persamaan simultan dengan empat nilai yang tidak diketahui, yaitu  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  dan  $a_3$ , disajikan pada persamaan (3.15), (3.16), (3.17) dan (3.18).

$$n \cdot a_0 + \sum X_i \cdot a_1 + \sum X_i^2 \cdot a_2 + \sum X_i^3 \cdot a_3 = \sum Y_i \dots\dots\dots(3.15)$$

$$\sum X_i \cdot a_0 + \sum X_i^2 \cdot a_1 + \sum X_i^3 \cdot a_2 + \sum X_i^4 \cdot a_3 = \sum X_i Y_i \dots\dots\dots(3.16)$$

$$\sum X_i^2 \cdot a_0 + \sum X_i^3 \cdot a_1 + \sum X_i^4 \cdot a_2 + \sum X_i^5 \cdot a_3 = \sum X_i^2 Y_i \dots\dots\dots(3.17)$$

$$\sum X_i^3 \cdot a_0 + \sum X_i^4 \cdot a_1 + \sum X_i^5 \cdot a_2 + \sum X_i^6 \cdot a_3 = \sum X_i^3 Y_i \dots\dots\dots(3.18)$$

dengan n adalah banyaknya pasangan data (X,Y).

### 3.5 Regresi Linear Berganda dengan Dua Peubah Bebas

Pada Santosa (2005) dijelaskan sebagai berikut :

Bentuk persamaan matematika yang menggambarkan regresi linear berganda dengan dua peubah bebas adalah :

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 \dots\dots\dots(3.19)$$

Dengan  $a_0$ ,  $a_1$ , dan  $a_2$  adalah koefisien yang diperoleh dari hasil regresi. Penyelesaian dari persamaan tersebut berupa sekumpulan tiga persamaan simultan dengan tiga nilai yang tidak diketahui yaitu  $a_0$ ,  $a_1$  dan  $a_2$ , disajikan dalam persamaan (3.20), (3.21), dan (3.22).

$$n \cdot a_0 + \sum X_{1i} \cdot a_1 + \sum X_{2i} \cdot a_2 = \sum Y_i \dots\dots\dots(3.20)$$

$$\sum X_{1i} \cdot a_0 + \sum X_{1i}^2 \cdot a_1 + \sum X_{2i} X_{1i} \cdot a_2 = \sum X_{1i} Y_i \dots\dots\dots(3.21)$$

$$\sum X_{2i} \cdot a_0 + \sum X_{2i} X_{1i} \cdot a_1 + \sum X_{2i}^2 \cdot a_2 = \sum X_{2i} Y_i \dots\dots\dots(3.22)$$

dengan n adalah banyaknya pasangan data (X1, X2, Y).

### 3.6 Regresi Linear Berganda dengan Tiga Peubah Bebas

Pada Santosa (2005) dijelaskan sebagai berikut :

Bentuk persamaan matematika yang menggambarkan regresi linear berganda dengan tiga peubah bebas adalah :

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 \dots\dots\dots(3.23)$$

Dengan  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  dan  $a_3$  adalah koefisien yang diperoleh dari hasil regresi. Penyelesaian dari persamaan tersebut berupa sekumpulan empat persamaan simultan dengan empat nilai yang tidak diketahui yaitu  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ , dan  $a_3$  adisajikan dalam persamaan (3.24), (3.25), (3.26) dan (3.27).

$$n \cdot a_0 + \sum X_{1i} \cdot a_1 + \sum X_{2i} \cdot a_2 + \sum X_{3i} \cdot a_3 = \sum Y_i \dots\dots\dots(3.24)$$

$$\sum X_{1i} \cdot a_0 + \sum X_{1i}^2 \cdot a_1 + \sum X_{2i} X_{1i} \cdot a_2 + \sum X_{3i} X_{1i} \cdot a_3 = \sum X_{1i} Y_i \dots\dots(3.25)$$

$$\sum X_{2i} \cdot a_0 + \sum X_{2i} X_{1i} \cdot a_1 + \sum X_{2i}^2 \cdot a_2 + \sum X_{3i} X_{2i} \cdot a_3 = \sum X_{2i} Y_i \dots\dots\dots(3.26)$$

$$\sum X_{3i} \cdot a_0 + \sum X_{3i} X_{1i} \cdot a_1 + \sum X_{3i} X_{2i} \cdot a_2 + \sum X_{3i}^2 \cdot a_3 = \sum X_{3i} Y_i \dots\dots\dots(3.27)$$

dengan  $n$  adalah banyaknya pasangan data  $(X_1, X_2, X_3, Y)$ .

### 3.7 Persamaan Eksponensial

Pada Santosa (2005) dijelaskan sebagai berikut :

Persamaan matematis yang menggambarkan model eksponensial adalah :

$$Y = \alpha e^{\beta X} \dots\dots\dots(3.28)$$

Dengan  $\alpha$  dan  $\beta$  adalah parameter yang akan diduga nilainya, sedangkan  $e$  adalah bilangan logaritma natural, yaitu 2,7183.

Estimasi nilai  $\alpha$  dan  $\beta$  dari bentuk fungsi eksponensial tersebut dapat dilakukan dengan mentransformasikan model tersebut ke bentuk linearnya melalui logaritma sebagai berikut :

dari  $Y = \alpha e^{\beta X}$



maka :

$$\ln Y = \ln \alpha + \beta \ln e$$

$$\Leftrightarrow \ln Y = \ln \alpha + \beta X \dots\dots\dots(3.29)$$

Di bawah ini disajikan program persamaan eksponensial dalam bentuk :

$$Y = P e^{QX} \dots\dots\dots(3.30)$$

dari sekelompok data pasangan (X,Y). Setelah dilakukan transformasi logaritma diperoleh :

$$\ln Y = \ln P + Q X \dots\dots\dots(3.31)$$

Dengan memisalkan :

$F = \ln Y$ ;  $A = \ln P$ , dan  $B = Q$ , maka dapat dibuat persamaan garis regresi linear :

$$F = A + B \cdot X \dots\dots\dots(3.32)$$

Dengan demikian diperoleh nilai A dan B. Berarti :

$$P = \text{anti ln } A = e^A$$

$$Q = B$$

### 3.8 Fungsi Transformasi Semi-Log

Pada Santosa (2005) dijelaskan sebagai berikut :

Bentuk fungsi transformasi semi-log adalah :

$$Y = a + b \ln X \dots\dots\dots(3.33)$$

dengan memisalkan  $V = \ln X$ , maka diperoleh persamaan regresi linear :

$$Y = A + B \cdot V \dots\dots\dots(3.34)$$

maka dapat diperoleh nilai konstanta A dan B.

## DAFTAR PUSTAKA

- Murphy, Glenn. 1950. *Similitude in Engineering*. The Ronald Press Company. USA.
- Santosa. 1993. *Aplikasi Program BASIC untuk Analisis Data Penelitian Dalam Penyajian Model Matematika*. Cetakan Pertama. Penerbit Andi Offset. Yogyakarta.
- Santosa. 2005. *Aplikasi Visual Basic 6.0 dan Visual Studio.Net 2003 Dalam Bidang Teknik dan Pertanian*. Penerbit Andi. Yogyakarta.